

熱対流現象

山中 透

2005 年 3 月

概要

流体を熱源に接触させ、流体に温度傾度を与えたときを考える。流体の温度傾度が小さいときは、熱拡散のみが起こるが、流体の温度傾度が閾値を越えると、熱拡散だけでは温度傾度を解消できなくなって不安定となり、対流が生じる。これをベナール対流とよぶ。

ここでは、ベナール対流を記述する非線型方程式の線型安定性の解析によって、流体が不安定化する条件を求め、熱対流が起こる原理を考える。さらに、いくつかの系に対して非線型方程式を数値計算して、ベナール対流の性質を流れと温度分布の面から研究する。

1 基礎方程式

ベナール対流を表す基礎方程式は、次の3つである。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\frac{1}{\rho_r} \nabla p + \nu \nabla^2 u - g\alpha(T - T_r) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (1.3)$$

ここで、 ν は動粘性係数、 κ は熱拡散係数である。

(1.1) において、密度に関するブシネスク近似を用いている。

ブシネスク近似では、流体を非圧縮性流体とし、流体中の圧力の変化は小さく、それによって密度は変化しないと仮定する。そのため、密度は主に温度差によって変化することになる。

基準温度 T_r からのずれを T' ($T = T_r + T'$) とすると、基準密度 ρ_r からのずれ ρ' ($\rho = \rho_r + \rho'$) は、

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_r T' = -\rho_r \alpha (T - T_r) \quad (1.4)$$

ここで、 α は体膨張係数である。

密度変化による浮力の作用で流動が発生すると圧力 p は、基準圧力 p_r から p' ずれる。ここで、基準を力学的平衡状態にすると、基準圧力 p_r は、次式で書ける。

$$p_r = \rho_r (g_i x_j) \delta_{ij} + \text{一定} \quad (1.5)$$

これらを重力の効果を含む Navie - Stokes の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u + g \quad (1.6)$$

に代入し、2次以上の微小量を無視すると (1.1) が得られる。ただし、(1.1) における圧力 p は、ここでの基準圧力からのずれ p' を意味する。

2 基礎方程式の無次元化

図 2.1 のようなベナール対流を考える. x 軸, y 軸は水平面内に, z 軸は鉛直方向にとつてある. $z = 0$ の下面を温度 T_0 の熱源に, $z = h$ の上面を温度 T_1 の熱源に接触させる. 下面の熱源の方が高温である.

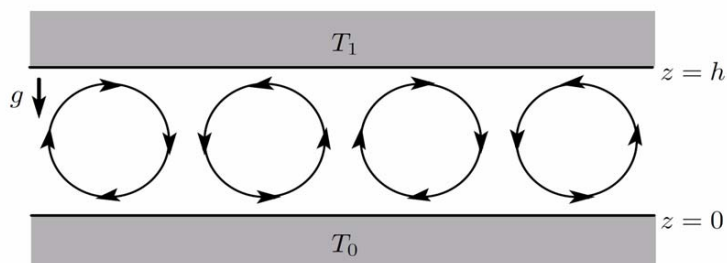


図 2.1 ベナール対流の模式図 ($T_0 > T_1$)

基準温度 T_r の温度勾配を次のように決める.

$$T_r = T_0 - \frac{T_0 - T_1}{h}z = T_0 - \beta z \quad (2.1)$$

次に, 表 2.1 を参考に下記のような無次元化を導入する.

$$x = hx', \quad y = hy', \quad z = hz'$$

$$t = \frac{h^2}{\nu}t'$$

$$u = \frac{\kappa}{h}u'$$

$$T = \beta h T' + T_r$$

$$p = \frac{\rho_r \kappa^2}{h^2}p'$$

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

$$R = \frac{g\alpha\beta}{\kappa\nu}h^4$$

	m	s	kg	K
g	1	-2		
h	1			
κ	2	-1		
ν	2	-1		
ρ	-3			1
T				1
β	-1			1
α				-1
t		1		
p	-1	2	1	

表 2.1 次元対応表

ここで, Pr はプラントル数, R はレイリー数と呼ばれる.

(1.1), (1.2), (1.3) を無次元化すると次のようになる. ' はすべて省略してある.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{Pr}(u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{Pr}\nabla p + \nabla^2 u + RTk \quad (2.2)$$

$$Pr \frac{\partial T}{\partial t} + (u \cdot \nabla)T - u_3 = \nabla^2 T \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2.4)$$

ただし, $k = (0, 0, 1)$. また, 温度, 圧力に対応する無次元数 T , p はいずれも基準状態からのずれである. よって, 高温接触面 ($y = 0$), 低温接触面 ($y = 1$) においては, 常に $T = 0$ である.

3 線型安定性解析

$u = 0$, $p = 0$, $T = 0$ の定常状態から微小変化したときの z 方向の線型安定性を考える．この定常状態は，熱対流を考えずに長時間放置した力学的平衡状態だと思ってよい．

微小変化を明示するために， $u \rightarrow \delta u$, $p \rightarrow \delta p = (0, 0, \delta p)$, $T \rightarrow \delta T$ として，(2.2), (2.3), (2.4) に代入する．(2.2) と (2.3) の左辺の第 2 項は 2 次の微小量なので無視できる．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \delta u = -\frac{1}{Pr} \nabla \delta p + R \delta T k \quad (3.1)$$

$$\left(Pr \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \delta T = \delta u_3 \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \delta u = 0 \quad (3.3)$$

(3.1) に， ∇ を作用させ，さらに z について偏微分すると，

$$\nabla^2 \frac{\partial(\delta p)}{\partial z} = Pr R \frac{\partial^2(\delta T)}{\partial z^2} \quad (3.4)$$

(3.1) に ∇^2 を作用させ，(3.4) を用いると，

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 \right) \delta u_3 = R \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \delta T \quad (3.5)$$

次の微小波が伝わったときの安定性を考える．

$$\delta u_3 = \tilde{U}(z) e^{i(k_1 x + k_2 y)} e^{\omega t} \quad (3.6)$$

$$\delta T = \tilde{T}(z) e^{i(k_1 x + k_2 y)} e^{\omega t} \quad (3.7)$$

(3.6), (3.7) を (3.2), (3.5) に代入して整理すると，

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 - \omega \right) \tilde{U}(z) = R k^2 \tilde{T}(z) \quad (3.8)$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 - Pr \omega \right) \tilde{T}(z) = -\tilde{U}(z) \quad (3.9)$$

ここで， $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ ．

また，自由境界条件 $\tilde{U}(z) = 0$, $\frac{d^2}{dz^2} \tilde{U}(z) = 0$, $\tilde{T}(z) = 0$ ($z = 0, 1$) より，

$$\tilde{U}(z) = A_n \sin(n\pi z) \quad (3.10)$$

$$\tilde{T}(z) = B_n \sin(n\pi z) \quad (3.11)$$

(3.10), (3.11) を (3.8), (3.9) に代入して，行列の表示にすると，

$$\begin{pmatrix} K^2 + K\omega & -Rk^2 \\ 1 & -(K + Pr\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{U}(z) \\ \tilde{T}(z) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

ここで， $K = n^2 \pi^2 + k^2$ ．

$\begin{pmatrix} \tilde{U}(z) \\ \tilde{T}(z) \end{pmatrix} = 0$ 以外の解を $\tilde{U}(z)$, $\tilde{T}(z)$ がもつためには,

$$\det \begin{pmatrix} K^2 + K\omega & -Rk^2 \\ 1 & -(K + Pr\omega) \end{pmatrix} = 0$$

$$KPr\omega^2 + K^2(Pr + 1)\omega + K^3 - Rk^2 = 0 \quad (3.13)$$

(3.13) を解くと,

$$\omega = \frac{-K^2(Pr + 1) + \sqrt{K^4(Pr + 1)^2 - 4KPr(K^3 - Rk^2)}}{2KPr} \quad (3.14)$$

$\delta u_3, \delta T \propto e^{\omega t}$ より, $\omega > 0$ のときは, $\delta u_3, \delta T$ は時間とともに増大し, 不安定となる. 逆に $\omega < 0$ のときは, $\delta u_3, \delta T$ は時間とともに減少するので, 安定となる.

$\omega = 0$ の条件は, $R = \frac{(n^2\pi^2 + k^2)^3}{k^2} \equiv R_c$ (臨界レイリー数).

以上より, $\omega > 0$ すなわち $R > R_c$ のとき, 安定となり, $\omega < 0$ すなわち $R < R_c$ のとき, 不安定となる.

4 2次元ベナール対流の数値シュミレーション

ベナール対流の数値シュミレーションを行うにあたって, (2.2), (2.3), (2.4) を用いるわけだが, 圧力を独立に求めることができないので, (3.1) の rotation をとることで, 圧力の項を消去できる ($\nabla \times \nabla p = 0$).

x 軸を水平方向, y 軸を鉛直方向にとる. 渦度 ω を

$$\omega = \nabla \times u = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (4.1)$$

流れ関数 ψ を

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -u_y \quad (4.2)$$

で定義する. このとき, 無次元化した基礎方程式は次の3つになる. ただし, 無次元化するのに, $t = (h^2/\kappa)t'$ を用いている.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u \cdot \nabla) T = \nabla^2 T \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \omega = Pr \nabla^2 \omega + PrR \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.5)$$

4.1 下壁高温, 上壁低温

下壁に高温の熱源を, 上壁に低温の熱源を設置し, 側壁に完全熱伝導体を用いたモデルの数値シュミレーションをいくつか行った.

(1) 縦横比 1 : 1

縦と横の長さを同じにしたときのシミュレーションの結果を図 4.1, 4.2 に記した. 図 4.1 は流れ関数の図で, 流れの回転方向の違いを色の違いで表したものである. 流れ関数の値が正のときは左回り, 負のときは右回りを意味する. 図 4.2 は温度分布の図で, 高温ほど赤色, 低温ほど青色である.

図 4.1 を見ると, それほど時間が経過していない内は, 2つの渦が発生しているのが分かる. 側壁に沿って上昇した流体が上壁の中心付近で収縮し, 下降流が発生し, それが下壁の中心付近で発散し, 側壁に向かって流れるからである.

しかし, 時間が経つと, 2つの渦が1つの渦になる. これは, 2つの渦の状態より1つの渦の状態の方がより安定であることを示している.

一方, 図 4.2 の温度分布は2つの角が立った状態, つまり両側から高温部がはみ出し, その間を低温部が突き出している状態から, 片側から高温部がはみ出し, もう片方から低温部がはみ出した状態に変化した. このとき, 1つの渦の状態に対応している.

図 4.3 は, レイリー数が前節の臨界レイリー数 R_c より小さいときの場合で, 温度分布を見ると明らかに上記の例とは異なり, きれいな縞模様になっている. また, 流れは2つの渦の状態でも安定しており, 時間が経過しても1つの渦になることなく2つの渦が維持された. ただ, 上記の例に比べて, 流れ関数の値が極端に (10^{14} 倍) 小さい.

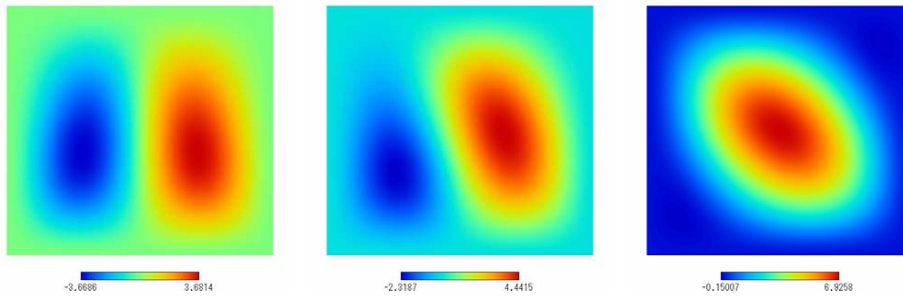


図 4.1 流れ関数 ($R=15000$, $Pr=7$, 縦横比 1 : 1). ステップ数 (左 — 10^4 , 中 — 2×10^5 , 右 — 3×10^5)

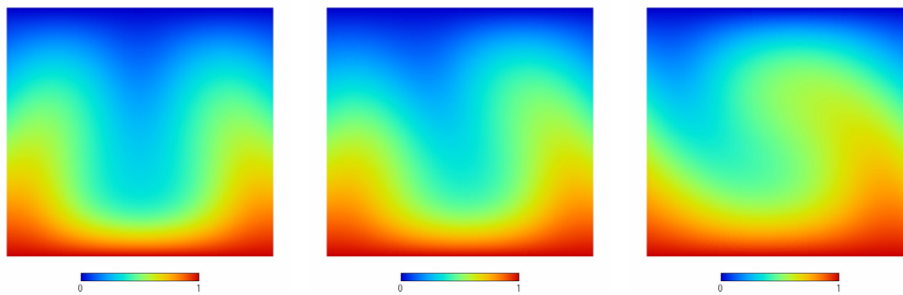


図 4.2 温度分布 ($R=15000$, $Pr=7$, 縦横比 1 : 1). ステップ数 (左 — 10^4 , 中 — 2×10^5 , 右 — 3×10^5)

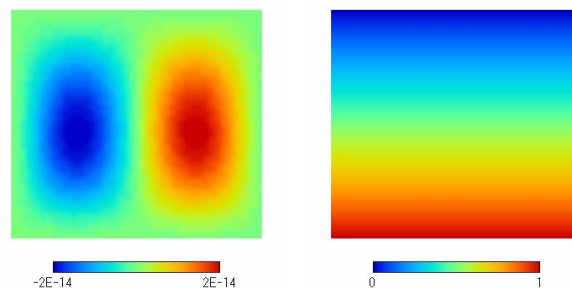


図 4.3 左 — 流れ関数, 右 — 温度分布 ($R=150$, $Pr=7$, 縦横比 1 : 1). ステップ数 (2×10^5)

(2) 縦横比 1 : 2

縦横比を 1 : 2 にしたときは、図 4.4 のように 2 つの渦の状態で安定化した。

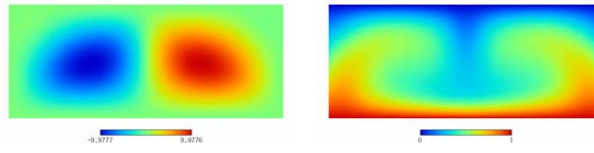


図 4.4 左 — 流れ関数, 右 — 温度分布 ($R=15000$, $Pr=7$, 縦横比 1 : 2). ステップ数 (2×10^5)

(3) 縦横比大

縦横比を 1 : 2 より大きくすると、渦の数は増えていくが、奇数個の渦は生じない。2 つの渦から、4 つ、6 つ、 \dots と増えていく。その一例を図 4.5, 4.6 に記した。

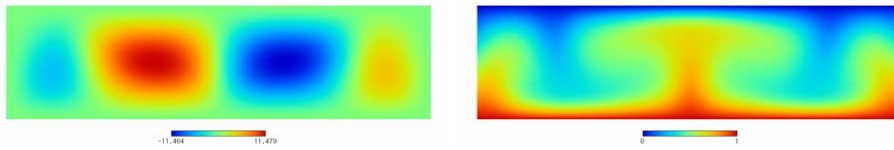


図 4.5 左 — 流れ関数, 右 — 温度分布 ($R=15000$, $Pr=7$, 縦横比 1 : 3). ステップ数 (10^5)

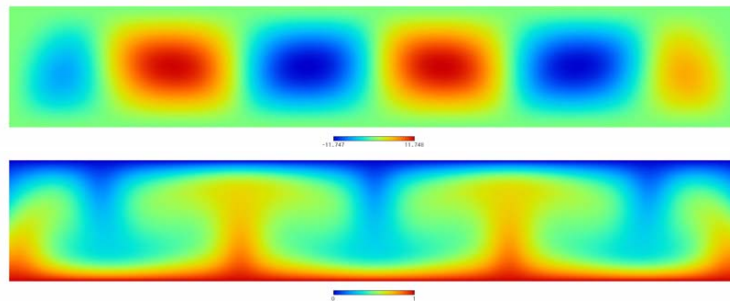


図 4.6 上 — 流れ関数, 下 — 温度分布 ($R=15000$, $Pr=7$, 縦横比 1 : 5). ステップ数 (10^5)

4.2 側壁に熱源

左側の側壁に低温の熱源を、右側の側壁に高温の熱源を接触させ、下壁を完全熱伝導体、上壁を開放系として空気層に接触させるモデルを考える。

図 4.7 に時間が経ったときの温度分布と流れの様子を記した。この場合、渦は最初から 1 つで、右側壁で上昇、左側壁で下降することで生じる渦である。

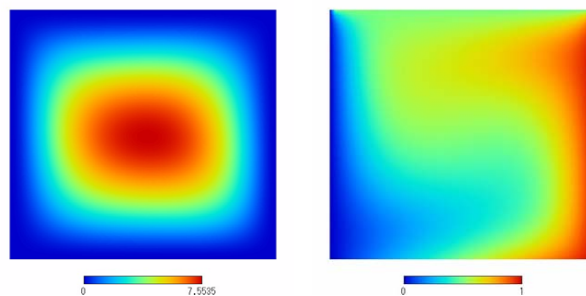


図 4.7 左 — 流れ関数, 右 — 温度分布 ($R=15000$, $Pr=7$). ステップ数 (5×10^4)

参考文献

- [1] Joel H. Ferziger and Milovan Perić. Computational methods for fluid dynamics, 176–178. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. (小林 敏雄, 谷口 伸行, 坪倉 誠 訳 (2003) 『コンピュータによる流体力学』. Springer-Verlag 東京).
- [2] Tian Ma and Shouhong Wang. Dynamic bifurcation and stability in the rayleigh-bénard convection. *Comm. Math. Sci.*, Vol. 2, No. 2, 159–183, 2004.
- [3] 北原和夫, 吉川研一. 非平衡系の科学 I 反応・拡散・対流の現象論, 192–196. 講談社サイエンティフィタ, 1994.
- [4] 吉澤徹, 村上周三, 小林敏雄, 谷口伸行, 戴毅, 黒田明慈 他. 乱流解析 数値流体力学シリーズ 3, 272–273. 東京大学出版会, 1995.